Licencia: CC BY-NC-SA 3.0 IGO, Omar Ancka Quispe

3. *De la Electrodinámica de los Cuerpos en Movimiento; por A. Einstein.*

Es bien sabido que la electrodinámica de Maxwell — tal como actualmente suele ser entendida — en su aplicación a los cuerpos en movimiento, conduce a asimetrías que no parecen inherentes a los fenómenos. Pensemos, por ejemplo, en la acción electrodinámica recíproca entre un imán y un conductor. El fenómeno observable, depende aquí, únicamente de ese movimiento relativo del conductor y del imán, mientras que según la opinión habitual, estos dos casos — que sea el uno o el otro de estos cuerpos el que se mueva — deben de separarse estrictamente entre sí. A saber, si el imán se mueve y el conductor está en reposo, entonces surge un campo eléctrico de cierto valor energético, en los alrededores del Imán que genera una corriente eléctrica en los lugares donde se encuentran partes del conductor. Pero, si el Imán está en reposo y se mueve el conductor, entonces no aparece un campo eléctrico en los alrededores del Imán, en cambio hay una fuerza electromotriz en el conductor, la cual en sí no corresponde a ninguna energía, que sin embargo — asumiendo igualdad del movimiento relativo en los dos casos bajo consideración — proporciona la causa para flujos eléctricos de la misma magnitud y del mismo curso, como las fuerzas eléctricas en el primer caso.

Ejemplos del mismo tipo, así como los intentos fallidos de constatar un movimiento de la tierra relativo al "medio luminoso", llevan a esta suposición: que el concepto de reposo absoluto no corresponde, no solo en mecánica sino también en electrodinámica, a ninguna propiedades de dichos fenómenos; sino que, al contrario, para todos los sistemas de coordenadas para los cuales se aplican las ecuaciones mecánicas también se aplican las mismas leyes electrodinámicas y ópticas, como ya se ha demostrado para las magnitudes de primer orden. Queremos elevar esta suposición (cuyo contenido en lo sucesivo será llamado "Principio de Relatividad") a requisito previo y aparte de eso introducir otro requisito previo, que solamente parece

Licencia: CC BY-NC-SA 3.0 IGO, Omar Ancka Quispe

incompatible con él; que la luz en el espacio vacío siempre se propaga con una velocidad especifica V, independiente del estado de movimiento del cuerpo emisor. Estos dos requisitos previos son suficientes, para llegar a una electrodinámica de cuerpos en movimiento simple y libre de contradicciones, sobre la base de la teoría de Maxwell para cuerpos en reposo. En este sentido, la introducción de un "éter luminífero" se probará como superflua cuando, según la concepción a desarrollar, no se introduzca un "espacio absolutamente en reposo" provisto de propiedades especiales, ni se asigne un vector de velocidad a un punto en el espacio vacío, en donde tienen lugar los procesos electromagnéticos.

La teoría a desarrollar se basa — como cualquier otra electrodinámica — en la cinemática del cuerpo rígido, ya que estas declaraciones afectan a cada una de las relaciones teóricas (sistema de coordenadas) entre cuerpos rígido, relojes y procesos electromagnéticos. La insuficiente consideración de esta circunstancia es la raíz de las dificultades, con las cuales tiene que luchar actualmente la electrodinámica de cuerpos en movimiento.

I. Parte Cinemática.

§ 1. Definición de Simultaneidad.

Existe un sistema de coordenadas en el cual son válidas las ecuaciones mecánicas newtonianas. Llamaremos a este sistema de coordenadas: el "Sistema en Reposo", para distinguirlo lingüísticamente de los sistemas de coordenadas que se introducirán más adelante y para precisar la idea.

Si un punto material está en reposo relativo a este sistema de coordenadas, entonces su posición relativa a este último se puede determinar y expresar en coordenadas cartesianas mediante una *regla de medir* rígida, utilizando los métodos de la geometría euclidiana.

Si queremos describir el *movimiento* de un punto material, entonces damos los valores de sus coordenadas en función del tiempo. Ahora bien, se ha de prestar atención a que una descripción matemática de este tipo, solo entonces tiene un significado físico, si uno previamente se ha dado cuenta sobre lo que se entiende aquí por "Tiempo". Debemos de tener presente,

que todos nuestros juicios, en los cuales el tiempo desempeña un papel, siempre son juicios sobre *eventos simultáneos.* Si, por ejemplo, digo: "Ese tren llega aquí a las 7 en punto", entonces esto significa algo como: Esta indicación de la manecilla pequeña de mi reloj sobre el 7 y esa llegada del tren son eventos simultáneos. [1])

Podría parecer, que todas las dificultades concernientes a la definición de "Tiempo" se podrían superar así: que en lugar de "Tiempo" se coloque "la posición de la manecilla pequeña de mi reloj". Efectivamente, una definición de este tipo es suficiente, cuando se trata de definir un tiempo exclusivamente para el lugar en donde se encuentra precisamente el reloj; pero la definición ya no es suficiente en cuanto se trate de relacionar con respecto al tiempo una serie de eventos entre si, que ocurren en lugares diferentes, o — lo que viene a ser lo mismo — de evaluar en el tiempo los eventos que ocurren en lugares alejados del reloj.

Sin embargo, al evaluar los eventos en el tiempo podríamos conformarnos con esto: que un observador ubicado en el origen de coordenadas junto al reloj, asigne la correspondiente posición de la manecilla del reloj a cada una de las señales luminosas que puedan dar testimonio de un evento a evaluar, y que llegan hacia él a través del espacio vacío. Pero una asignación de este tipo trae consigo el inconveniente que, como sabemos por la experiencia, no es independiente del punto de vista del observador provisto con el reloj. A través de la consideración siguiente llegamos a una determinación mucho más práctica.

Si un reloj se encuentra en el punto A del espacio, entonces un observador situado en A puede evaluar en el tiempo los eventos en el entorno inmediato de A al consultar las posiciones de las manecillas del reloj simultáneas con estos eventos. Si también se encuentra un reloj en el punto B del espacio — queremos agregar, "un reloj de exactamente la misma naturaleza como la situada en A" — entonces, también es posible una evaluación en el tiempo de los eventos en el entorno inmediato

[1]) No se debería debatir aquí, la imprecisión que reside en el concepto de simultaneidad de dos eventos en (aproximadamente) el mismo lugar y que igualmente tiene que ser superada por una abstracción.

de B, por un observador presente en B. Sin embargo, no es posible comparar, con respecto al tiempo, un evento en A con un evento en B, sin una determinación adicional; hasta ahora solo hemos definido un "Tiempo A" y un "Tiempo B", pero no un "Tiempo" común para A y B. Este último tiempo se puede ahora definir, si se establece *por definición*, que el "Tiempo" que necesita la luz para llegar desde A hacia B, es igual al "Tiempo" que se necesita para llegar desde B hacia A. Es decir, si un rayo de luz parte desde A hacia B en el "Tiempo A" (t_A), luego se refleja en B hacia A en el "Tiempo B" (t_B) y llega de regreso a A en el "Tiempo A" (t'_A). Los dos relojes funcionan, por definición, de forma sincronizada, cuando

$$t_B - t_A = t'_A - t_B .$$

Aceptaremos que esta definición de sincronismo es posible de manera consistente, y ciertamente para cualquier número de puntos, de modo que se aplican las relaciones, en general:

1. Si el reloj en B está sincronizado con el reloj en A, entonces el reloj en A está sincronizado con el reloj en B.

2. Si el reloj en A, está sincronizado tanto con el reloj en B como también con el reloj en C, entonces los relojes en B y C también están sincronizados relativamente entre sí.

Entonces, hemos establecido con la ayuda de ciertas experiencias físicas (pensadas), lo que debe entenderse por relojes en reposo funcionando de forma sincronizada, que se encuentran en lugares diferentes, y así aparentemente ganamos una definición de "simultaneidad" y "tiempo". El "Tiempo" de un evento es la *indicación simultánea*, de un reloj en reposo presente en el lugar del evento, con aquel evento; el cual funciona de manera sincronizada con otro determinado reloj en reposo, y ciertamente con ese mismo reloj para todas las determinaciones de tiempo.

Establecemos firmemente, conforme a la experiencia, que la magnitud

$$\frac{2\,\overline{AB}}{t'_A - t_A} = V$$

es una constante universal (la velocidad de la luz en el espacio vacío, V).

Es significativo, que hayamos definido el tiempo mediante

relojes en reposo en un sistema en reposo; vamos a llamar a este tiempo precisamente definido "el tiempo del sistema en reposo", debido a esta pertenencia con el sistema en reposo.

§ 2. Sobre la Relatividad de Longitudes y Tiempos.

Las siguientes consideraciones se basan en el Principio de Relatividad y en el Principio de la Constancia de la Velocidad de la Luz, dos principios los cuales vamos a definir como sigue.

1. Las leyes, conforme a las cuales, cambian los estados de los sistemas físicos, son independientes de: en cuál de los dos sistemas de coordenadas — situados relativamente entre sí en movimiento de traslación uniforme — están referidos estos cambios de estado.

2. Todo rayo de luz se desplaza en el sistema de coordenadas "en reposo" con una velocidad específica V, independientemente de, si este rayo de luz sea emitido por un cuerpo en movimiento o en reposo. En este caso, es

$$\text{Velocidad} = \frac{\text{Trayecto de la Luz}}{\text{Intervalo de Tiempo}},$$

en el cual "Intervalo de Tiempo" debe interpretarse en el sentido de la definición de § 1.

Se da una barra rígida en reposo; la misma posee, medida con una *regla de medir* igualmente en reposo, la longitud l. Pensemos ahora, en el eje de la barra puesto en el eje X del sistema de coordenadas en reposo, y luego se da a la barra un movimiento de traslación uniforme (velocidad v) paralelo a lo largo del Eje X, en el sentido del creciente de x. Ahora nos preguntamos por la longitud de la barra *en movimiento*, que pensamos determinar mediante las siguientes dos operaciones:

a) El observador, junto con la *regla de medir* antes mencionada, se desplaza con la barra a medir, y mide la longitud de la barra aplicando directamente la *regla de medir*; como si la barra a medir, el observador y la *regla de medir* estuvieran en reposo.

b) El observador determina mediante relojes en reposo sincronizados, establecidos en el sistema en reposo conforme a § 1, en qué puntos del sistema en reposo se encuentran: el *principio* y el *final* de la barra, que se va a medir en un tiempo t

específico. La distancia entre estos dos puntos — medida con la *regla de medir* en reposo ya utilizada en este caso — es igualmente una longitud que se puede designar cómo: "La Longitud de la Barra".

Según el principio de relatividad, la longitud a encontrar en la operación a), la cual queremos llamar "la longitud de la barra en el sistema en movimiento", debe ser igual a la longitud l de la barra en reposo.

La longitud a encontrar en la operación b), la cual queremos llamar "la longitud de la barra (en movimiento) en el sistema en reposo", la vamos a determinar sobre la base de nuestros dos principios anteriores y encontraremos que esta es diferente de l.

La cinemática comúnmente usada, acepta tácitamente que las longitudes determinadas por las dos operaciones mencionadas son exactamente iguales entre sí, o con otras palabras, que un cuerpo rígido en movimiento, en el periodo de tiempo t, es completamente reemplazable, en relación geométrica, por *el mismo* cuerpo cuando está *en reposo* en una determinada posición.

Pensemos además en relojes instalados en los dos extremos (A y B) de la barra que están sincronizados con los relojes del sistema en reposo, es decir, cuyas indicaciones corresponden respectivamente al "tiempo del sistema en reposo" en los lugares donde están situados exactamente; por lo tanto, estos relojes están "sincronizados con el sistema en reposo".

Pensemos también, que al lado de cada reloj se encuentra un observador moviéndose junto con él, y que dichos observadores aplican sobre estos dos relojes el criterio establecido en § 1 para que ambos relojes marchen sincronizados. En el tiempo [1]) t_A sale un rayo de luz desde A, se refleja en B en el tiempo t_B y llega de vuelta hacia A en el tiempo t'_A. Teniendo en consideración el Principio de la Constancia de la Velocidad de la Luz, encontramos:

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{V - v}$$

[1]) "Tiempo" significa aquí "Tiempo del sistema en reposo" y a la vez "posición de las manecillas del reloj en movimiento, que se encuentra en el lugar sobre el cual estamos hablando".

y

$$t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{V + v},$$

donde r_{AB} significa: la longitud de la barra en movimiento medida en el sistema en reposo. De este modo, los observadores que se mueven con la barra en movimiento encuentran que los dos relojes no van sincronizados, mientras que los observadores situados en el sistema en reposo declararían que los relojes funcionan de forma sincronizada.

Vemos, por tanto, que no debemos atribuirle un significado *absoluto* al concepto de simultaneidad, sino que dos eventos que, vistos desde un sistema de coordenadas '*como simultáneos*', ya no se pueden considerar como eventos simultáneos vistos desde un sistema en movimiento relativo a este sistema.

§ 3. Teoría de la Transformación de Coordenadas y Tiempo desde un Sistema en reposo a uno situado en movimiento de Traslación Uniforme relativo a éste.

Sea dado dos sistemas de coordenadas en el espacio "en reposo", es decir, dos sistemas de tres líneas materiales rígidas cada una, que salen desde un punto, perpendiculares entre sí. Los ejes X de ambos sistemas pueden coincidir, sus ejes Y y Z respectivos están en paralelo. Agregado a cada sistema hay una *regla de medir* rígida y una serie de relojes, y sean ambas *reglas de medir* y todos los relojes de ambos sistemas exactamente iguales entre sí.

Se imparte ahora al punto de origen de uno de los dos sistemas "k", una velocidad (constante) v — en el sentido de la creciente de x del otro sistema en reposo "K" — que también se transmite a los ejes de coordenadas, a la respectiva *regla de medir* y los relojes. Cada tiempo t del sistema en reposo K, corresponde entonces a una determinada posición de los ejes del sistema en movimiento, y por razones de simetría estamos facultados a suponer que el movimiento de k se puede obtener de este modo: que los ejes del sistema en movimiento, en el tiempo t (con t, siempre se designa un tiempo del sistema en reposo), sean paralelos a los ejes del sistema en reposo.

Pensemos ahora que se mide el espacio tanto desde el sistema en reposo K, por medio de la *regla de medir* en reposo, como también desde el sistema en movimiento k, por medio de

la *regla de medir* que se mueve con él, y así determinamos las coordenadas x, y, z relativas a ξ, η, ζ. Además, por medio de los relojes en reposo situados en el sistema en reposo, el tiempo t del sistema en reposo se determina mediante señales luminosas, de la manera indicado en § 1, para todos los puntos de este último en los que se encuentran los relojes; igualmente, el tiempo τ del sistema en movimiento se determina, para todos los puntos del sistema en movimiento en donde se encuentran los relojes en reposo con respecto a este último, aplicando el método de las señales luminosas, mencionado en § 1, entre los puntos en los cuales se encuentran estos últimos relojes.

Para cada *sistema de valores* x, y, z, t, que define completamente la posición y el tiempo de un evento en el sistema en reposo, le corresponde un *sistema de valores* ξ, η, ζ, τ, que fija ese evento relativo en el sistema k, y la tarea consiste ahora en encontrar el sistema de ecuaciones que relaciona estas cantidades.

Para empezar, está claro que las ecuaciones deben ser lineales debido a las propiedades de homogeneidad que otorgamos al espacio y al tiempo.

Si colocamos $x' = x - v\,t$, entonces está claro que, a un punto en reposo en el sistema k le corresponde un determinado *sistema de valores* x', y, z, independiente del tiempo. Primero determinamos τ como una función de x', y, z y t. Para este fin, tenemos que expresar, en ecuaciones, que τ no es otra cosa que el epítome de las indicaciones desde los relojes en reposo del sistema k, que conforme a la regla dada en § 1, se han realizado de forma sincronizada.

Desde el punto de origen del sistema k, se envía un rayo de luz en el tiempo τ_0 a lo largo del Eje X hacia x', y desde allí se refleja en el tiempo τ_1 hacia el origen de coordenadas, donde llega en el tiempo τ_2; entonces, luego debe ser:

$$\tfrac{1}{2}\,(\tau_0 + \tau_2) = \tau_1$$

o si se adjuntan los argumentos a la función τ y aplicando el Principio de la Constancia de la Velocidad de la Luz en el sistema en reposo:

$$\tfrac{1}{2}\left[\tau(0,0,0,t) + \tau\Big(0,0,0,\Big\{t + \frac{x'}{V-v} + \frac{x'}{V+v}\Big\}\Big)\right] = \tau\Big(x',0,0,t + \frac{x'}{V-v}\Big)\,.$$

De esto se deduce, si se elige x' infinitamente pequeño:

$$\tfrac{1}{2}\Big(\frac{1}{V-v}+\frac{1}{V+v}\Big)\frac{\partial\tau}{\partial t}=\frac{\partial\tau}{\partial x'}+\frac{1}{V-v}\frac{\partial\tau}{\partial t},$$

o

$$\frac{\partial\tau}{\partial x'}+\frac{v}{V^2-v^2}\frac{\partial\tau}{\partial t}=0.$$

Debe mencionarse que se podría haber elegido, en vez del origen de coordenadas, cualquier otro punto como punto de partida del rayo de luz, y por esa razón, la ecuación recién obtenida será válida para todos los valores de x', y, z.

Una consideración análoga — aplicada sobre los ejes H y Z —, si se considera que la luz a lo largo de estos ejes, vista desde el sistema en reposo, siempre se propaga con la velocidad $\sqrt{V^2-v^2}$, proporciona:

$$\frac{\partial\tau}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial z}=0$$

De estas ecuaciones, ya que τ es una función lineal, se deduce:

$$\tau=a\Big(t-\frac{v}{V^2-v^2}x'\Big),$$

donde a es una función $\varphi(v)$ provisionalmente desconocida y para simplificar se asume, que en el punto de origen de k para $\tau=0$, sea $t=0$.

Con la ayuda de este resultado, es fácil de obtener las cantidades ξ, η, ζ, si se expresa mediante ecuaciones, que la luz (como exige el Principios de la Constancia de la Velocidad de la Luz en conexión con el Principio de Relatividad) medida en el sistema en movimiento también se propaga con la velocidad V. Para un rayo de luz emitido en el tiempo $\tau=0$, en el sentido del creciente de ξ, se aplica:

$$\xi=V\tau,$$

o

$$\xi=aV\Big(t-\frac{v}{V^2-v^2}x'\Big),$$

Pero ahora, el rayo de luz se mueve de forma relativa al punto

de origen de k con la velocidad $V - v$, medido en el sistema en reposo, así que se aplica:

$$\frac{x'}{V - v} = t\,.$$

Si colocamos este valor de t en la ecuación para ξ, entonces obtenemos:

$$\xi = a\,\frac{V^2}{V^2 - v^2}\,x'\,.$$

De forma análoga, considerando los rayos de luz que se mueven a lo largo de los otros dos ejes, encontramos:

$$\eta = V\tau = a\,V\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2}\,x'\right),$$

teniendo en cuenta

$$\frac{y}{\sqrt{V^2 - v^2}} = t\,; \quad x' = 0\,;$$

entonces

$$\eta = a\,\frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}}\,y$$

y

$$\zeta = a\,\frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}}\,z\,.$$

Si colocamos su valor para x', entonces obtenemos:

$$\begin{aligned}
\tau &= \varphi(v)\,\beta\left(t - \frac{v}{V^2}\,x\right),\\
\xi &= \varphi(v)\,\beta\,(x - v\,t)\,,\\
\eta &= \varphi(v)\,y\,,\\
\zeta &= \varphi(v)\,z\,,
\end{aligned}$$

utilizando

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}$$

y φ es una función de v provisionalmente desconocida. Si no se hace ninguna suposición sobre la posición inicial del sistema en movimiento y sobre el punto cero de τ, entonces se debe agregar una constante aditiva a los lados derechos de cada una de estas ecuaciones.

Ahora nos disponemos a demostrar que todo rayo de luz, medido en el sistema en movimiento, se propaga con la velocidad V, si, como hemos supuesto, este es el caso en el sistema en

reposo; porque aún no hemos proporcionado las pruebas al respecto, que el Principio de la Constancia de la Velocidad de la Luz sea compatible con el Principio de Relatividad.

En el tiempo $t = \tau = 0$ se envía, desde el origen de coordenadas común a ambos sistemas respecto a este tiempo, una onda esférica que se extiende en el sistema K con velocidad V. Si (x, y, z) es un punto ocupado precisamente por esta onda, entonces es

$$x^2 + y^2 + z^2 = V^2 t^2 .$$

Transformamos esta ecuación con ayuda de nuestras ecuaciones de transformación y obtenemos tras un simple cálculo:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = V^2 \tau^2 .$$

La onda considerada es, de este modo, también una onda esférica con velocidad de propagación V, vista desde el sistema en movimiento. Expresamente, esto demuestra que nuestros dos principios básicos son compatibles entre sí.

En las ecuaciones de transformación desarrolladas todavía aparece una función desconocida φ de v, que ahora deseamos determinar.

Para este propósito introducimos un tercer sistema de coordenadas K', que se concibe en movimiento de traslación paralelo, con respecto al sistema k en paralelo al Eje Ξ, de tal forma que su origen de coordenadas se mueve con la velocidad $-v$ respecto al eje Ξ. En el tiempo $t = 0$, los tres puntos de origen de coordenadas pueden todos coincidir y hacer que, para $t = x = y = z = 0$, el tiempo t' del sistema K' sea igual a cero. Llamamos x', y', z' a las coordenadas medidas en el sistema K', y aplicando dos veces nuestras ecuaciones de transformación obtenemos:

$$\begin{aligned}
t' &= \varphi(-v)\,\beta(-v)\left\{\tau + \frac{v}{V^2}\,\xi\right\} = \varphi(v)\,\varphi(-v)\,t\,,\\
x' &= \varphi(-v)\,\beta(-v)\left\{\xi + v\,\tau\right\} \quad = \varphi(v)\,\varphi(-v)\,x\,,\\
y' &= \varphi(-v)\,\eta \qquad\qquad\qquad\quad = \varphi(v)\,\varphi(-v)\,y\,,\\
z' &= \varphi(-v)\,\zeta \qquad\qquad\qquad\quad = \varphi(v)\,\varphi(-v)\,z\,.
\end{aligned}$$

Puesto que las relaciones entre x', y', z' y x, y, z no contienen el tiempo t, entonces los sistemas K y K' están en reposo

uno con respecto al otro, y es claro que la transformación desde K a K' tiene que ser *la transformación identidad.* Esto es:

$$\varphi(v)\,\varphi(-v) = 1\,.$$

Ahora, nos preguntamos por el significado de $\varphi(v)$. Vamos a poner atención a un trozo del Eje H del sistema k, que está situada entre $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ y $\xi = 0$, $\eta = l$, $\zeta = 0$. Este trozo del Eje H es una barra *en movimiento perpendicular a su eje*, con la velocidad v relativa al sistema K, cuyos extremos tienen en K las coordenadas:

$$x_1 = v\,t\,, \qquad y_1 = \frac{l}{\varphi(v)}\,, \qquad z_1 = 0$$

y

$$x_2 = v\,t\,, \qquad y_2 = 0\,, \qquad z_2 = 0$$

Por lo tanto, la longitud de la barra, medida en K, es $l/\varphi(v)$; con esto se proporciona el significado de la función φ. Por razones de simetría ahora es evidente, que la longitud de una determinada barra medida en el sistema en reposo, que se mueve perpendicularmente a su eje, solo puede depender de su velocidad pero no de la dirección o el sentido del movimiento. De este modo, la longitud de la barra en movimiento que se ha medido en el sistema en reposo no cambia si v se intercambia con $-v$. De aquí se concluye:

$$\frac{l}{\varphi(v)} = \frac{l}{\varphi(-v)}\,,$$

o

$$\varphi(v) = \varphi(-v)\,.$$

De esta y de la relación encontrada anteriormente se deduce que debe de ser $\varphi(v) = 1$, así que, las ecuaciones de transformación encontradas se convierten en:

$$\begin{aligned}
\tau &= \beta\left(t - \frac{v}{V^2}\,x\right),\\
\xi &= \beta\left(x - v\,t\right),\\
\eta &= y\,,\\
\zeta &= z\,,
\end{aligned}$$

utilizando

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}\,,$$

§ 4. Significado Físico de las Ecuaciones obtenidas, Relativas a Cuerpos Rígidos en movimiento y Relojes en movimiento.

Consideremos una esfera [1]) rígida de radio R que está en reposo con respecto al sistema en movimiento k y cuyo centro está situada en el origen de coordenadas de k. La ecuación de la superficie de esta esfera que está en movimiento relativo al sistema K con la velocidad v, es:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2 .$$

La ecuación de esta superficie, expresada en x, y, z en el tiempo $t = 0$, es:

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)^2} + y^2 + z^2 = R^2 .$$

De este modo, un cuerpo rígido que medido en estado de reposo tiene la forma de una esfera, tiene en estado de movimiento — visto desde el sistema en reposo — la forma de un elipsoide de revolución, con los ejes:

$$R\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2},\ R,\ R .$$

Así, mientras que las dimensiones Y y Z de la esfera (por tanto también de cualquier cuerpo rígido de cualquier forma) no aparecen modificadas por el movimiento, la dimensión X aparece acortada en la proporción $1 : \sqrt{1 - (v/V)^2}$, es decir, cuanto más grande v, mucho mayor será. Para $v = V$, todos los objetos en movimiento — vistos desde el sistema "en reposo" — se contraen juntas en estructuras planas. Para velocidades más rápidas que la luz nuestras consideraciones pierden sentido; por otra parte, en las consideraciones siguientes encontraremos que en nuestra teoría, la velocidad de la luz desempeña físicamente el papel del infinito a grandes velocidades.

Está claro que los mismos resultados se aplican a los cuerpos en reposo en el sistema "en reposo", que pueden ser vistos desde un sistema en movimiento uniforme.

Pensemos además en uno de los relojes, que es capaz de indicar: el tiempo t en reposo, relativo al sistema en reposo; y el

[1]) Es decir, un cuerpo que, cuando se examina en reposo, tiene una forma esférica.

tiempo τ en reposo, relativo al sistema en movimiento; situado en el origen de coordenadas de k y así orientado, de tal manera que indique el tiempo τ. ¿Qué tan rápido va este reloj, visto desde el sistema en reposo?

Evidentemente, entre las cantidades x, t y τ, que hacen referencia a la posición de este reloj, se aplican las ecuaciones:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}\left(t - \frac{v}{V^2}x\right)$$

y

$$x = vt.$$

Así se tiene

$$\tau = t\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2} = t - \left(1 - \sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)t,$$

de donde se sigue que la indicación del reloj (considerado en el sistema en reposo) se atrasa *por segundo* en $(1-\sqrt{1-(v/V)^2})$ segundos, o — con excepción de las magnitudes de cuarto orden y superiores — en $\frac{1}{2}(v/V)^2$ segundos.

De esto surge la siguiente peculiar consecuencia. Se dispone de relojes en reposo, en los puntos A y B de K, que marchan sincronizados vistos desde el sistema en reposo; y el reloj en A se mueve, con la velocidad v, por la linea que lo une hacia B; entonces, después de la llegada de este reloj a B, los dos relojes ya no marchan sincronizados, sino que el reloj que se ha movido desde A hacia B se retrasa con respecto al reloj situado en B, desde el punto de partida, en $\frac{1}{2}tv^2/V^2$ segundos (excepto para magnitudes de cuarto orden y superiores), si t es el tiempo que el reloj requiere desde A hacia B.

Se ve inmediatamente, que este resultado sigue siendo válido incluso si el reloj se mueve de A a B en una línea poligonal cualquiera, y de hecho, incluso después, cuando los puntos A y B coinciden.

Si se acepta que este resultado, demostrado para una línea poligonal, también es válido para una curva de curvatura constante, entonces se obtiene este Teorema: Si se sitúan en A dos relojes que marchan sincronizados y uno de ellos se desplaza por una curva cerrada a velocidad constante, hasta que vuelve de nuevo hacia A, lo cual puede tardar t segundos, entonces este último reloj a su llegada a A estará retrasado, con respecto

al que permaneció inmóvil, en $\frac{1}{2} t (v/V)^2$ segundos. De aquí se concluye, que un *reloj de volante regulador* situado en la línea ecuatorial debe funcionar más lento, en una cantidad muy pequeña, que un reloj situado en uno de los polos de la Tierra, de exactamente las mismas características y sometido siempre a las mismas condiciones.

§ 5. Teorema de la Suma de Velocidades.

En el sistema k en movimiento a lo largo del Eje X del sistema K con velocidad v, un punto se desplaza conforme a las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \xi &= w_\xi \tau , \\ \eta &= w_\eta \tau , \\ \zeta &= 0 , \end{aligned}$$

donde w_ξ y w_η representan constantes.

Se busca el movimiento del punto, relativo al sistema K. Si se introduce las cantidades x, y, z, t en las ecuaciones de movimiento del punto, con la ayuda de las ecuaciones de transformación desarrolladas en § 3, entonces se obtiene:

$$\begin{aligned} x &= \frac{w_\xi + v}{1 + \frac{v\, w_\xi}{V^2}} t , \\ y &= \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}{1 + \frac{v\, w_\xi}{V^2}} w_\eta t , \\ z &= 0 . \end{aligned}$$

Entonces, la ley del paralelogramo de velocidades es válida, según nuestra teoría, sólo en una primera aproximación. Vamos a poner:

$$U^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 ,$$

$$w^2 = w_\xi^2 + w_\eta^2$$

y

$$\alpha = \arctan \frac{w_y}{w_x} ;$$

en este caso, α se considera como el ángulo entre las velocidades v y w. Después de un simple cálculo resulta:

$$U = \frac{\sqrt{(v^2 + w^2 + 2\,v\,w\cos\alpha) - \left(\frac{v\,w\ \operatorname{sen}\alpha}{V}\right)^2}}{1 + \frac{v\,w\ \cos\alpha}{V^2}}.$$

Es sorprendente que v y w entran de manera simétrica en la expresión de la velocidad resultante. Si w también tiene la dirección del Eje X (Eje Ξ), entonces obtenemos:

$$U = \frac{v + w}{1 + \frac{v\,w}{V^2}}$$

De esta ecuación se deduce que de la composición de dos velocidades que son menores que V siempre resulta en una velocidad menor que V. Es decir, si uno pone $v = V - \varkappa$, $w = V - \lambda$, donde $\varkappa$ y λ son positivos y menores que V, entonces será:

$$U = V\,\frac{2\,V - \varkappa - \lambda}{2\,V - \varkappa - \lambda + \frac{\varkappa\,\lambda}{V}} < V.$$

Se deduce además, que *la velocidad de la luz V no se puede modificar* por composición con una "velocidad inferior a la de la luz". Para este caso se obtiene:

$$U = \frac{V + w}{1 + \frac{w}{V}} = V.$$

También podríamos haber conseguido la fórmula de U para el caso de que v y w posean la misma dirección, componiendo dos transformaciones tal como en § 3. Manejaríamos, además de los sistemas K y k resaltados en § 3, todavía un tercero; un sistema de coordenadas k' concebido en movimiento paralelo a k, cuyo punto de origen se movería sobre el Eje Ξ con la velocidad w, entonces obtendríamos las ecuaciones entre las cantidades x, y, z, t y las correspondientes cantidades de k', que serán diferentes de las encontradas en § 3 solo en que, en lugar de "v" aparece la cantidad

$$\frac{v + w}{1 + \frac{v\,w}{V^2}},$$

de aquí se puede ver que tales transformaciones paralelas — como debe de ser — forman un grupo.

Tenemos ahora derivado los teoremas, para nosotros, necesarios de la cinemática correspondientes a nuestros dos principios, y procedemos a mostrar su aplicación en electrodinámica.

II. Parte Electrodinámica.

§ 6. Transformación de las Ecuaciones de Maxwell-Hertz para el espacio vacío. Sobre la naturaleza de las Fuerzas Electromotrices que ocurren durante el movimiento en un Campo Magnético.

Las ecuaciones de Maxwell-Hertz para el espacio vacío deberían ser válidas para el sistema K en reposo; por lo que se pueden aplicar:

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y},$$
$$\frac{1}{V}\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z},$$
$$\frac{1}{V}\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x},$$

donde (X, Y, Z) representa el vector de la fuerza eléctrica, (L, M, N) el de la fuerza magnética.

Aplicaremos a estas ecuaciones la transformación desarrollada en § 3, relacionando los procesos electromagnéticos sobre el sistema de coordenadas, arriba introducido, que se mueve con la velocidad v, entonces obtenemos las ecuaciones:

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X}{\partial \tau} = \frac{\partial \beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right)}{\partial \eta} - \frac{\partial \beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right)}{\partial \zeta},$$
$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right)}{\partial \tau} = \frac{\partial L}{\partial \zeta} - \frac{\partial \beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right)}{\partial \xi},$$
$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right)}{\partial \tau} = \frac{\partial \beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right)}{\partial \xi} - \frac{\partial L}{\partial \eta},$$
$$\frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial \tau} = \frac{\partial \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right)}{\partial \zeta} - \frac{\partial \beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right)}{\partial \eta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial\beta\left(M+\frac{v}{V}Z\right)}{\partial\tau}=\frac{\partial\beta\left(Z+\frac{v}{V}M\right)}{\partial\xi}-\frac{\partial X}{\partial\zeta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial\beta\left(N-\frac{v}{V}Y\right)}{\partial\tau}=\frac{\partial X}{\partial\eta}-\frac{\partial\beta\left(Y-\frac{v}{V}N\right)}{\partial\xi},$$

utilizando

$$\beta=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

El principio de la relatividad exige ahora que las ecuaciones de Maxwell-Hertz para el espacio vacío también sean válidas en el sistema k cuando ellas son válidas en el sistema K, es decir, que para los vectores de fuerza eléctrica (X', Y', Z') y magnética (L', M', N') del sistema k en movimiento — definidos en el sistema en movimiento k por sus efectos ponderomotrices sobre las masas eléctrica y magnética — sean válidas las ecuaciones:

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X'}{\partial\tau}=\frac{\partial N'}{\partial\eta}-\frac{\partial M'}{\partial\zeta},\quad \frac{1}{V}\frac{\partial L'}{\partial\tau}=\frac{\partial Y'}{\partial\zeta}-\frac{\partial Z'}{\partial\eta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Y'}{\partial\tau}=\frac{\partial L'}{\partial\zeta}-\frac{\partial N'}{\partial\xi},\quad \frac{1}{V}\frac{\partial M'}{\partial\tau}=\frac{\partial Z'}{\partial\xi}-\frac{\partial X'}{\partial\zeta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Z'}{\partial\tau}=\frac{\partial M'}{\partial\xi}-\frac{\partial L'}{\partial\eta},\quad \frac{1}{V}\frac{\partial N'}{\partial\tau}=\frac{\partial X'}{\partial\eta}-\frac{\partial Y'}{\partial\xi}.$$

Evidentemente, los dos sistemas de ecuaciones encontrados para el sistema k deben ahora expresar exactamente lo mismo, ya que ambos sistemas de ecuaciones son equivalentes a las ecuaciones de Maxwell-Hertz para el sistema K. Dado que las ecuaciones de ambos sistemas además coinciden, excepto en los símbolos que representan los vectores, entonces se deduce que para todas las funciones de un conjunto de sistema de ecuaciones, las funciones que aparecen en los lugares correspondientes de estos sistemas de ecuaciones, deben de coincidir, excepto por un factor $\psi(v)$ eventualmente dependiente de v e independiente de ξ, η, ζ y τ. De este modo, se aplican las relaciones:

$$X'=\psi(v)\,X,\qquad L'=\psi(v)\,L,$$

$$Y'=\psi(v)\,\beta\left(Y-\frac{v}{V}N\right),\qquad M'=\psi(v)\,\beta\left(M+\frac{v}{V}Z\right),$$

$$Z'=\psi(v)\,\beta\left(Z+\frac{v}{V}M\right),\qquad N'=\psi(v)\,\beta\left(N-\frac{v}{V}Y\right).$$

Se forma ahora, el inverso de este sistema de ecuaciones, en primer lugar resolviendo las ecuaciones recientemente obtenidas, en segundo lugar aplicando las ecuaciones a la transformación inversa (de k sobre K), que está caracterizada por la velocidad $-v$, entonces si consideramos que los dos sistemas de ecuaciones así obtenidos deben ser idénticos, se tiene:

$$\varphi(v) \cdot \varphi(-v) = 1 .$$

asimismo, por razones de simetría se sigue [1])

$$\varphi(v) = \varphi(-v) ;$$

entonces es

$$\varphi(v) = 1 ,$$

y nuestras ecuaciones toman la forma de:

$$X' = X , \qquad L' = L ,$$
$$Y' = \beta\left(Y - \frac{v}{V} N\right), \qquad M' = \beta\left(M + \frac{v}{V} Z\right),$$
$$Z' = \beta\left(Z + \frac{v}{V} M\right), \qquad N' = \beta\left(N - \frac{v}{V} Y\right).$$

Para la interpretación de estas ecuaciones observamos lo siguiente. Se dispone de una carga eléctrica puntual, que medida en el sistema en reposo K resulta de magnitud "uno", es decir: en el sistema en reposo, ejerce en reposo la fuerza de 1 Dina sobre otra igual carga eléctrica a una distancia de 1 cm. Según el principio de relatividad, dicha masa eléctrica también se mide, en el sistema en movimiento, con la magnitud "uno". Dicha carga eléctrica en reposo relativo al sistema en reposo, entonces es, por definición el vector (X, Y, Z), igual a la fuerza que actúa sobre ella. Si la carga eléctrica está en reposo con respecto al sistema en movimiento (al menos en el instante en cuestión), entonces la fuerza que actúa sobre ella, medida en el sistema en movimiento, es igual al vector (X', Y', Z'). En consecuencia, las primeras tres de las ecuaciones anteriores se pueden poner en palabras de las dos maneras siguientes:

1. Si un *polo unitario* eléctrico puntual se mueve en un campo electromagnético, entonces, actúa sobre él, además de la

[1]) Si, p. ej., $X = Y = Z = L = M = 0$ y $N \neq 0$, entonces por razones de simetría, está claro que si v cambia de signo sin cambiar su valor numérico, Y' también debe cambiar su signo sin cambiar su valor numérico.

fuerza eléctrica, una "fuerza electromotriz" que, despreciando los términos multiplicados por las potencias segunda y superiores de v/V, es igual al producto vectorial de la velocidad de movimiento del *polo unitario* y la fuerza magnética, dividida por la velocidad de la luz. (Antigua forma de expresión)

2. Si un *polo unitario* eléctrico puntual se mueve en un campo electromagnético, entonces, la fuerza que actúa sobre él es igual a la fuerza eléctrica presente en el lugar del *polo unitario*, que se obtiene transformando el campo a un sistema de coordenadas en reposo relativo al *polo unitario* eléctrico. (Nueva forma de expresión.)

De manera análoga se aplica sobre las "fuerzas magnetomotrices". Se puede ver que en la teoría desarrollada la fuerza electromotriz solamente desempeña el papel de un término auxiliar, que debe su introducción a la circunstancia de que las fuerzas eléctricas y magnéticas no tienen existencia independiente de los estados de movimiento del sistema de coordenadas.

Además es claro que la asimetría mencionada en la introducción desaparece, al considerar a las corrientes, generadas por el movimiento relativo de un imán y un conductor. Incluso, las preguntas acerca del "asiento" de las fuerzas electromotrices electrodinámicas (máquinas unipolares) se vuelven irrelevantes.

§ 7. Teoría del Principio de Doppler y de la Aberración.

En el sistema K se encuentra una fuente de ondas electrodinámicas muy alejada del origen de coordenadas, que está representada en una parte del espacio que contiene el origen de coordenadas con suficiente aproximación, por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} X &= X_0 \operatorname{sen} \Phi, \quad L = L_0 \operatorname{sen} \Phi, \\ Y &= Y_0 \operatorname{sen} \Phi, \quad M = M_0 \operatorname{sen} \Phi, \quad \Phi = \omega\left(t - \frac{a\,x + b\,y + c\,z}{V}\right). \\ Z &= Z_0 \operatorname{sen} \Phi, \quad N = N_0 \operatorname{sen} \Phi, \end{aligned}$$

En este caso (X_0, Y_0, Z_0) y (L_0, M_0, N_0) son los vectores que determinan la amplitud del tren de ondas; a, b, c los cosenos directores de la normal de onda.

Nos preguntamos por la naturaleza de estas ondas, cuando las mismas son examinadas por un observador en reposo en el

sistema k en movimiento. — Aplicando las ecuaciones de transformación para las fuerzas eléctricas y magnéticas encontradas en § 6 y las ecuaciones de transformación para las coordenadas y el tiempo encontradas en § 3, obtenemos inmediatamente:

$$X' = X_0 \operatorname{sen} \Phi', \quad L' = L_0 \operatorname{sen} \Phi',$$

$$Y' = \beta\left(Y_0 - \frac{v}{V} N_0\right) \operatorname{sen} \Phi', \quad M' = \beta\left(M_0 - \frac{v}{V} Z_0\right) \operatorname{sen} \Phi',$$

$$Z' = \beta\left(Z_0 - \frac{v}{V} M_0\right) \operatorname{sen} \Phi', \quad N' = \beta\left(N_0 - \frac{v}{V} Y_0\right) \operatorname{sen} \Phi',$$

$$\Phi' = \omega'\left(\tau - \frac{a'\xi + b'\eta + c'\zeta}{V}\right).$$

donde se establece

$$\omega' = \omega\beta\left(1 - a\frac{v}{V}\right),$$

$$a' = \frac{a - \frac{v}{V}}{1 - a\frac{v}{V}},$$

$$b' = \frac{b}{\beta\left(1 - a\frac{v}{V}\right)},$$

$$c' = \frac{c}{\beta\left(1 - a\frac{v}{V}\right)}.$$

De la ecuación para ω' se deduce: Si un observador se mueve en relación con una fuente de luz infinitamente lejana de una frecuencia ν, con la velocidad v de tal manera que; la línea que conecta a "la fuente de luz y al observador", forma un ángulo φ, con la velocidad de ese observador respecto al sistema de coordenadas en reposo relativo a la fuente de luz, entonces, la frecuencia ν' de la luz percibida por el observador está dada por la ecuación:

$$\nu' = \nu \frac{1 - \cos\varphi \frac{v}{V}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Este es el principio de Doppler para cualquier velocidad. Para

$\varphi = 0$ la ecuación toma una forma fácil de apreciar:

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}}.$$

Se puede ver que — contrariamente a la opinión habitual — para $v = -\infty$, resulta $\nu' = \infty$.

Si llamamos φ' al ángulo entre la normal de onda (dirección del rayo) en el sistema en movimiento y la línea que conecta a "la fuente de luz y el observador", entonces la ecuación para a' toma la forma de:

$$\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi - \frac{v}{V}}{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}.$$

Esta ecuación expresa la Ley de Aberración en su forma más general. Si $\varphi = \pi/2$, entonces la ecuación toma la forma simple de:

$$\cos\varphi' = -\frac{v}{V}.$$

Ahora, todavía tenemos que encontrar la amplitud de las ondas, igual como aparecen en el sistema en movimiento. Si llamamos A y A' a la amplitud de la fuerza, ya sea eléctrica o magnética, medidas en el sistema en reposo y en el sistema en movimiento respectivamente, entonces se obtiene:

$$A'^2 = A^2 \frac{\left(1 - \frac{v}{V}\cos\varphi\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2},$$

que, para $\varphi = 0$, se convierte en una ecuación más simple:

$$A'^2 = A^2 \frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}.$$

De estas ecuaciones desarrolladas se deduce que para un observador que se acerca a una fuente de luz con una velocidad V, dicha fuente de luz debería de aparecer con una intensidad infinita.

§ 8. Transformación de la Energía de los rayos de Luz. Teoría de la presión de Radiación ejercida sobre Espejos perfectos.

Dado que $A^2/8\pi$ es igual a la energía de la luz por unidad de volumen, entonces según el principio de relatividad tenemos que considerar a $A'^2/8\pi$ como la energía de la luz en el sistema en movimiento. Por tanto, A'^2/A^2 sería la relación entre la energía "medida en movimiento" y la "medida en reposo" de un cierto *complejo luminoso*, sí el volumen del *complejo luminoso* medido en K y el medido en k fuera el mismo. Sin embargo, éste no es el caso. Si a, b, c son los cosenos directores de las normales de onda de la luz en el sistema en reposo, entonces no pasa ninguna energía a través de los elementos superficiales de la superficie esférica:

$$(x - Vat)^2 + (y - Vbt)^2 + (z - Vct)^2 = R^2 ,$$

que se mueve a la velocidad de la luz; por consiguiente, podemos decir que esta superficie encierra constantemente el mismo *complejo luminoso*. Nos preguntamos por la cantidad de energía que encierra esta superficie en el sistema k considerado, es decir, por la energía del *complejo luminoso* relativo al sistema k.

La superficie esférica, — vista desde el sistema en movimiento — es una superficie elipsoidal, que en el tiempo $\tau = 0$ tiene la ecuación:

$$\left(\beta\xi - a\beta\frac{v}{V}\xi\right)^2 + \left(\eta - b\beta\frac{v}{V}\xi\right)^2 + \left(\zeta - c\beta\frac{v}{V}\xi\right)^2 = R^2$$

Si llamamos S al volumen de la esfera y S' al de este elipsoide, entonces como muestra un simple cálculo, será:

$$\frac{S'}{S} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi} .$$

Si llamamos ahora, E a la energía luminosa medida en el sistema en reposo, E' a la medida en el sistema en movimiento, que está encerrada por la superficie en consideración, entonces se obtiene:

$$\frac{E'}{E} = \frac{\frac{A'^2}{8\pi}S'}{\frac{A^2}{8\pi}S} = \frac{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}$$

cuya fórmula para $\varphi = 0$ se vuelve más sencilla:

$$\frac{E'}{E} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}}.$$

Es notable que la energía y la frecuencia de un *complejo luminoso* cambie, conforme a la misma ley, con el estado de movimiento del observador.

Sea ahora el plano de coordenadas $\xi = 0$ una superficie reflectante perfecta, en la cual se pueden reflejar las ondas planas consideradas en el párrafo anterior. Nos preguntamos por la presión de la luz ejercida sobre la superficie reflectante y por la dirección, frecuencia e intensidad de la luz después de la reflexión.

Esta luz incidente sea definido mediante las magnitudes A, $\cos\varphi$, ν (con respecto al sistema K). Las magnitudes correspondientes vistas desde k, son:

$$A' = A \frac{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

$$\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi - \frac{v}{V}}{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi},$$

$$\nu' = \nu \frac{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Para la luz reflejada, cuando relacionamos el proceso sobre el sistema k, obtenemos:

$$A'' = A',$$
$$\cos\varphi'' = -\cos\varphi',$$
$$\nu'' = \nu'.$$

Por último, mediante una nueva transformación hacia el sistema K en reposo, se obtiene para la luz reflejada:

$$A''' = A'' \frac{1 + \frac{v}{V}\cos\varphi''}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} = A \frac{1 - 2\frac{v}{V}\cos\varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2},$$

$$\cos\varphi''' = \frac{\cos\varphi'' + \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}\cos\varphi''} = -\frac{\left(1 + \left(\frac{v}{V}\right)^2\right)\cos\varphi - 2\frac{v}{V}}{1 - 2\frac{v}{V}\cos\varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2},$$

$$\nu''' = \nu'' \frac{1 + \frac{v}{V}\cos\varphi''}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} = \nu \frac{1 - 2\frac{v}{V}\cos\varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2}{\left(1 - \frac{v}{V}\right)^2}.$$

La energía que incide sobre la unidad de área del espejo por unidad de tiempo (medida en el sistema en reposo) es evidentemente $A^2/8\pi(V\cos\varphi - v)$. La energía que se marcha desde la unidad de área del espejo en la unidad de tiempo es $A'''^2/8\pi(-V\cos\varphi''' + v)$. Según el principio de la energía, la diferencia entre estas dos expresiones es el trabajo realizado por la presión de la luz en la unidad de tiempo. Si esta última se hace igual al producto $P \cdot v$, donde P es la presión de la luz, entonces se obtiene::

$$P = 2\frac{A^2}{8\pi} \frac{\left(\cos\varphi - \frac{v}{V}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}.$$

De acuerdo con la experiencia y con diferente teorías, en la primera aproximación se obtiene:

$$P = 2\frac{A^2}{8\pi}\cos^2\varphi.$$

De acuerdo con el método aquí utilizado, se pueden resolver todos los problemas de la óptica de los cuerpos en movimiento. Lo esencial es que la fuerza eléctrica y magnética de la luz, que es influenciada por un cuerpo en movimiento, se transformen a un sistema de coordenadas en reposo relativo al cuerpo. Como resultado, todo problema de la óptica de los cuerpos en movimiento se reduce a una serie de problemas de la óptica de los cuerpos en reposo.

§ 9. Transformación de las Ecuaciones de Maxwell-Hertz considerando las Corrientes de Convección.

Vamos a partir de las ecuaciones:

$$\frac{1}{V}\left\{u_x\,\varrho+\frac{\partial X}{\partial t}\right\}=\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z},\quad \frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y},$$
$$\frac{1}{V}\left\{u_y\,\varrho+\frac{\partial Y}{\partial t}\right\}=\frac{\partial L}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial x},\quad \frac{1}{V}\frac{\partial M}{\partial t}=\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z},$$
$$\frac{1}{V}\left\{u_z\,\varrho+\frac{\partial Z}{\partial t}\right\}=\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y},\quad \frac{1}{V}\frac{\partial N}{\partial t}=\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x},$$

utilizando

$$\varrho=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}$$

que es la 4π-veces densidad de electricidad, y $(u_x,\ u_y,\ u_z)$ representa el vector velocidad de la corriente eléctrica. Si se piensa que estas masas eléctricas están ligadas invariablemente a pequeños cuerpos rígidos (iones, electrones), entonces estas ecuaciones son la base electromagnética de la electrodinámica de Lorentz y de la óptica, de los cuerpos en movimiento.

Estas ecuaciones, que pueden ser válidas en el sistema K, con la ayuda de las ecuaciones de transformación de § 3 y § 6 se transforman al sistema k, entonces se obtiene las ecuaciones:

$$\frac{1}{V}\left\{u_\xi\,\varrho'+\frac{\partial X'}{\partial \tau}\right\}=\frac{\partial N'}{\partial \eta}-\frac{\partial M'}{\partial \zeta},\quad \frac{\partial L'}{\partial \tau}=\frac{\partial Y'}{\partial \zeta}-\frac{\partial Z'}{\partial \eta},$$
$$\frac{1}{V}\left\{u_\eta\,\varrho'+\frac{\partial Y'}{\partial \tau}\right\}=\frac{\partial L'}{\partial \zeta}-\frac{\partial N'}{\partial \xi},\quad \frac{\partial M'}{\partial \tau}=\frac{\partial Z'}{\partial \xi}-\frac{\partial X'}{\partial \zeta},$$
$$\frac{1}{V}\left\{u_\zeta\,\varrho'+\frac{\partial Z'}{\partial \tau}\right\}=\frac{\partial M'}{\partial \xi}-\frac{\partial L'}{\partial \eta},\quad \frac{\partial N'}{\partial \tau}=\frac{\partial X'}{\partial \eta}-\frac{\partial Y'}{\partial \xi},$$

en las cuales

$$\frac{u_x-v}{1-\frac{u_x\,v}{V^2}}=u_\xi,$$
$$\frac{u_y}{\beta\left(1-\frac{u_x\,v}{V^2}\right)}=u_\eta,\quad \varrho'=\frac{\partial X'}{\partial \xi}+\frac{\partial Y'}{\partial \eta}+\frac{\partial Z'}{\partial \zeta}=\beta\left(1-\frac{v\,u_x}{V^2}\right)\varrho.$$
$$\frac{u_z}{\beta\left(1-\frac{u_x\,v}{V^2}\right)}=u_\zeta,$$

Dado que — como se deduce del teorema de la suma de velocidades (§ 5) — el vector (u_ξ, u_η, u_ζ) no es otra cosa que la velocidad de las masas eléctricas medidas en el sistema k, entonces, queda así demostrado, que — sobre la base de nuestros principios cinemáticos — el *fundamento electrodinámico* de la teoría de Lorentz para la electrodinámica de los cuerpos en movimiento, corresponde al principio de relatividad.

Conviene señalar brevemente que a partir de las ecuaciones desarrolladas, se puede deducir fácilmente el siguiente importante teorema: Si un cuerpo cargado eléctricamente se mueve arbitrariamente en el espacio y su carga — visto desde un sistema de coordenadas que se mueve con el cuerpo — no cambia en el proceso, entonces su carga visto desde el sistema "en reposo" K también permanece constante.

§ 10. Dinámica del Electrón (lentamente acelerado).

En un campo electromagnético se mueve una partícula puntual provista con una carga eléctrica ε (en adelante llamado "electrón"), sobre cuya ley de movimiento únicamente aceptaremos lo siguiente:

Si el electrón está en reposo en un determinado periodo de tiempo $(t_0 = 0)$, entonces el movimiento del electrón se produce en el *diferencial de tiempo* siguiente (dt_1), según las ecuaciones:

$$\mu \frac{d^2 x}{dt^2} = \varepsilon X$$
$$\mu \frac{d^2 y}{dt^2} = \varepsilon Y$$
$$\mu \frac{d^2 z}{dt^2} = \varepsilon Z\,,$$

donde x, y, z son las coordenadas del electrón; μ es la masa del electrón, siempre que se mueva lentamente.

En segundo lugar, si el electrón adquiere ahora, en un cierto periodo de tiempo (t_1), la velocidad v; podemos encontrar la ley, conforme a la cual se ha movido el electrón al *diferencial de tiempo* inmediatamente siguiente (dt_1).

Sin afectar la generalidad de esta consideración, podemos y queremos suponer que el electrón, en el instante en que "*lo miramos*", se encuentra sobre el *origen del Eje de Coordenadas*

en Marcha y moviéndose con la velocidad v a lo largo del Eje X del sistema K. Es evidente entonces que en el instante mencionado ($d\,t_1 > t_0 = 0$) el electrón esta en reposo respecto al sistema de coordenadas k con velocidad constante v, que se mueve de forma paralela a lo largo del Eje X del sistema K.

Del criterio formulado arriba junto con el principio de relatividad está claro, que el electrón se ha movido en el tiempo inmediatamente siguiente (para valores pequeños de t) visto desde el sistema k, de acuerdo con las ecuaciones:

$$\mu \frac{d^2\,\xi}{d\,\tau^2} = \varepsilon\, X'$$
$$\mu \frac{d^2\,\eta}{d\,\tau^2} = \varepsilon\, Y'$$
$$\mu \frac{d^2\,\zeta}{d\,\tau^2} = \varepsilon\, Z'$$

donde los símbolo ξ, η, ζ, τ, X', Y', Z' están relacionados al sistema k. Establecemos también que para $t = x = y = z = 0$, debe ser $\tau = \xi = \eta = \zeta = 0$, entonces son válidas las ecuaciones de transformación de § 3 y § 6, de modo que se aplican:

$$\tau = \beta\left(t - \frac{v}{V^2}\,x\right),$$
$$\xi = \beta\left(x - v\,t\right), \qquad X' = X\,,$$
$$\eta = y\,, \qquad Y' = \beta\left(Y - \frac{v}{V}\,N\right),$$
$$\zeta = z\,, \qquad Z' = \beta\left(Z + \frac{v}{V}\,M\right).$$

Con la ayuda de estas ecuaciones, transformamos las ecuaciones de movimiento anteriores del sistema k al sistema K y obtenemos:

(A)
$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2\,x}{d\,t^2} = \dfrac{\varepsilon}{\mu}\,\dfrac{1}{\beta^3}\,X\,, \\ \dfrac{d^2\,y}{d\,t^2} = \dfrac{\varepsilon}{\mu}\,\dfrac{1}{\beta}\left(Y - \dfrac{v}{V}\,N\right), \\ \dfrac{d^2\,z}{d\,t^2} = \dfrac{\varepsilon}{\mu}\,\dfrac{1}{\beta}\left(Z + \dfrac{v}{V}\,M\right). \end{array}\right.$$

Basándonos en el planteamiento habitual, nos preguntamos ahora por la masa “longitudinal” y “transversal” del

electrón en movimiento. Escribiremos las ecuaciones de (A) en la forma:

$$\mu\beta^3\frac{d^2x}{dt^2} = \varepsilon X = \varepsilon X',$$
$$\mu\beta^2\frac{d^2y}{dt^2} = \varepsilon\beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right) = \varepsilon Y',$$
$$\mu\beta^2\frac{d^2z}{dt^2} = \varepsilon\beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right) = \varepsilon Z'$$

y observaremos en primer lugar, que $\varepsilon X'$, $\varepsilon Y'$, $\varepsilon Z'$ son las componentes de la fuerza ponderomotriz que actúan sobre el electrón, y de hecho, vistos en un sistema que se mueve en ese momento con el electrón a la misma velocidad que éste. (Esta fuerza podría medirse, por ejemplo, con una "balanza de resorte" en reposo al último sistema). Si ahora simplemente llamamos a esta fuerza "la fuerza que actúa sobre el electrón" y mantenemos la ecuación

$$\text{Valor de Masa} \times \text{Valor de Aceleración} = \text{Valor de Fuerza},$$

y si además estipulamos que las aceleraciones han de medirse en el sistema K en reposo; entonces obtenemos a partir de las ecuaciones anteriores:

$$\text{Masa Longitudinal} = \frac{\mu}{\left(\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)^3},$$
$$\text{Masa Transversal} = \frac{\mu}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}.$$

Naturalmente, si la fuerza y la aceleración se definieran de forma diferente, se obtendrían otros números para las masas; se ve de esto, que uno debe de proceder con mucho cuidado al comparar diferentes teorías del movimiento del electrón.

Observamos que estos resultados sobre la masa también son válidos para los puntos materiales ponderables; porque un punto material ponderable puede convertirse en un electrón (en nuestra definición) si le agregamos una carga eléctrica *arbitrariamente pequeña.*

Vamos a determinar la energía cinética del electrón. Si un electrón se mueve desde el origen de coordenadas del sistema K con la velocidad inicial 0 de forma constante sobre el Eje X

bajo el efecto de una fuerza electrostática X, entonces es claro, que la energía extraída del campo electrostático tiene el valor $\int \varepsilon X\, dx$. Dado que el electrón debe ser acelerado lentamente y, por consiguiente, no puede emitir ninguna energía en forma de radiación, entonces la energía extraída del campo electrostático debe de igualarse a la energía cinética W del electrón. Por tanto, si tenemos en cuenta que la primera de las ecuaciones en (A) es válida durante la totalidad del proceso del movimiento considerado, se obtiene:

$$W = \int \varepsilon X\, dx = \int_0^v \beta^3 v\, dv = \mu V^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\}.$$

De este modo, W se vuelve, para $v = V$, infinitamente grande. Las velocidades más rápidas que la luz — como con nuestros resultados anteriores — no tienen posibilidad de existencia.

En efecto, según el argumento mencionado arriba, esta expresión para la energía cinética también debe ser válida para las masas ponderables.

Ahora queremos enumerar las propiedades del movimiento del electrón accesibles experimentalmente, que resultan del sistema de ecuaciones en (A).

1. De la segunda ecuación del sistema (A) se deduce que una fuerza eléctrica Y y una fuerza magnética N tienen entonces un efecto de desviación de igual intensidad sobre un electrón que se mueve con la velocidad v, cuando $Y = N.v/V$. De este modo se puede ver que la determinación de la velocidad del electrón a partir de la relación entre la desviación magnética A_m y la desviación eléctrica A_e es posible según nuestra teoría para cualquier velocidad, aplicando la ley:

$$\frac{A_m}{A_e} = \frac{v}{V}.$$

Esta relación se puede comprobar experimentalmente, ya que la velocidad del electrón también puede medirse directamente, por ejemplo, por medio de campos eléctricos y magnéticos que oscilan rápidamente.

2. A partir de la derivación de la energía cinética del electrón se deduce que, entre *la diferencia de potencial* P recorrida

y la *velocidad alcanzada* v, por el electrón; debe aplicarse la relación:

$$P = \int X\,dx = \frac{\mu}{\varepsilon} V^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\}.$$

3. Calcularemos el radio de curvatura R de la trayectoria, cuando existe una fuerza magnética N (como única fuerza desviadora) actuando perpendicularmente a la velocidad del electrón. De la segunda ecuación en (A) obtenemos:

$$-\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{v^2}{R} = \frac{\varepsilon}{\mu}\frac{v}{V} N \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}$$

o

$$R = V^2 \frac{\mu}{\varepsilon} \cdot \frac{\frac{v}{V}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \cdot \frac{1}{N} \cdot$$

Estas tres relaciones son la expresión completa de las leyes según las cuales, de acuerdo con la presente teoría, el electrón debe moverse.

Para concluir, me gustaría decir que mi amigo y colega M. Besso estuvo fielmente a mi lado mientras trabajaba en el problema tratado aquí, y que estoy en deuda con él por sus valiosas sugerencias.

Berna, Junio de 1905.

(Recibido el 30 de Junio de 1905.)

Licencia: CC BY-NC-SA 3.0 IGO, Omar Ancka Quispe